

Concours externe du Capes et Cafep-Capes

Section mathématiques

Exemple de sujet pour l'épreuve écrite disciplinaire appliquée

À compter de la session 2022, les épreuves du concours externe du Capes et du Cafep-Capes sont modifiées. L'arrêté du 25 janvier 2021, publié au journal officiel du 29 janvier 2021, fixe les modalités d'organisation du concours et décrit le nouveau schéma des épreuves.

CAPES externe de mathématiques

Sujet « zéro »

Épreuves définies par l'arrêté du 25 janvier 2021, fixant les modalités d'organisation des concours du certificat d'aptitude au professorat du second degré – NOR : MENH 2033181A

Épreuves écrites d'admissibilité (. . .)

2° Épreuve disciplinaire appliquée

L'épreuve permet d'apprécier l'aptitude du candidat à mobiliser ses connaissances et compétences mathématiques et didactiques dans une perspective professionnelle.

Le sujet est constitué d'un dossier comprenant un ou plusieurs énoncés d'exercices, des productions d'élèves, des documents institutionnels (extraits de programmes ou de ressources d'accompagnement), des extraits de manuels scolaires ou d'autres supports. Il est attendu du candidat :

- la résolution des exercices proposés;
- une analyse de leur pertinence au regard des objectifs des programmes;
- une évaluation des productions d'élèves (identification et traitement d'erreurs, valorisation de réussites, propositions de remédiation ou d'approfondissement);
- la conception d'une séquence portant sur un thème en lien avec les exercices du dossier (structuration du cours, choix d'activités, cohérence didactique, réflexion sur l'usage d'outils numériques, intégration d'éléments d'histoire des mathématiques, liens avec d'autres disciplines, etc.).

Durée : cinq heures. Coefficient 2.
L'épreuve est notée sur 20. Une note globale égale ou inférieure à 5 est éliminatoire.

CAPES externe de mathématiques

Sujet « zéro »

Ce sujet permet d'évaluer tout particulièrement les compétences suivantes extraites de l'arrêté du 1er juillet 2013 relatif au référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation (NOR : MENE1315928A).

P 1. Maîtriser les savoirs disciplinaires et leur didactique

– Connaître de manière approfondie sa discipline ou ses domaines d'enseignement. En situer les repères fondamentaux, les enjeux épistémologiques et les problèmes didactiques.

– Maîtriser les objectifs et les contenus d'enseignement, les exigences du socle commun de connaissances, de compétences et de culture ainsi que les acquis du cycle précédent et du cycle suivant.

P 2. Maîtriser la langue française dans le cadre de son enseignement

P 3. Construire, mettre en œuvre et animer des situations d'enseignement et d'apprentissage prenant en compte la diversité des élèves

– Savoir préparer les séquences de classe et, pour cela, définir des programmations et des progressions ; identifier les objectifs, contenus, dispositifs, obstacles didactiques, stratégies d'étayage, modalités d'entraînement et d'évaluation.

– Différencier son enseignement en fonction des rythmes d'apprentissage et des besoins de chacun. Adapter son enseignement aux élèves à besoins éducatifs particuliers.

– Sélectionner des approches didactiques appropriées au développement des compétences visées.

P 5. Évaluer les progrès et les acquisitions des élèves

– Construire et utiliser des outils permettant l'évaluation des besoins, des progrès et du degré d'acquisition des savoirs et des compétences.

– Analyser les réussites et les erreurs, concevoir et mettre en œuvre des activités de remédiation et de consolidation des acquis.

Le dossier de ce sujet comprend deux parties indépendantes l'une de l'autre.

Dossier, partie 1 : proportionnalité

Programme de mathématiques du cycle 4

Résoudre des problèmes de proportionnalité

Connaissances

- Coefficient de proportionnalité.
- Taux d'évolution, coefficient multiplicateur.
- Notion de ratio.

On dit, par exemple, que :

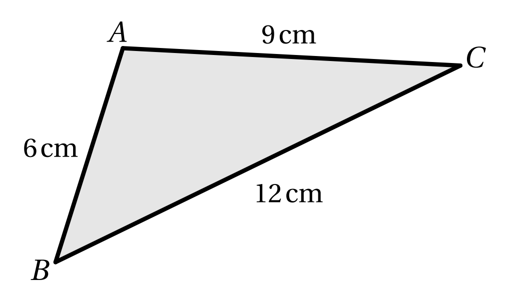
- *deux nombres a et b sont dans le ratio* $2:3$ *(notation standardisée) si* $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3}$ *;*
- *trois nombres a, b, c sont dans le ratio* $2:3:7$ *(notation standardisée) si* $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{7}$.

Compétences associées

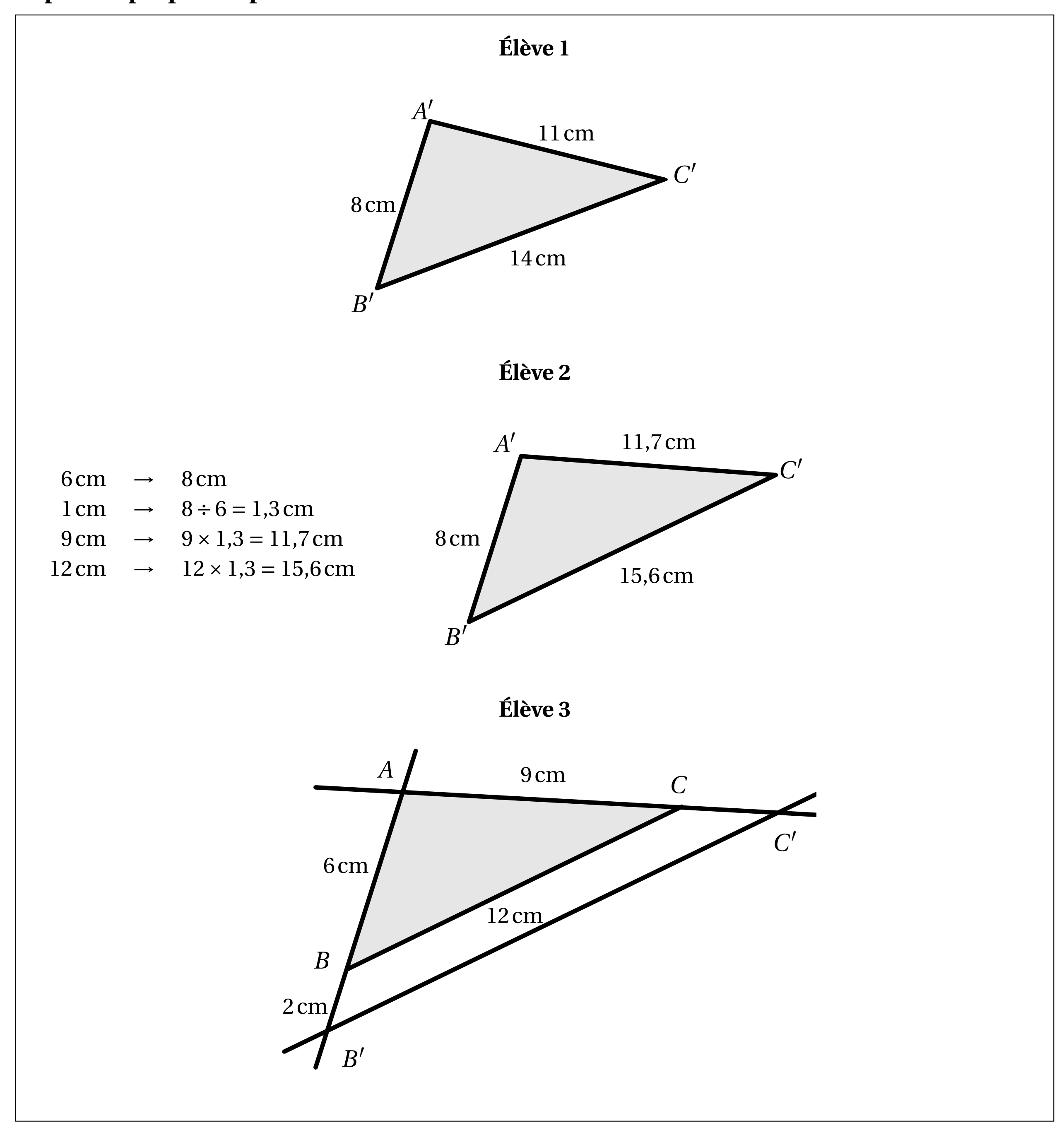
- Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.
- Calculer une quatrième proportionnelle.
- Partager une quantité (par exemple une somme d'argent) en deux ou trois parts selon un ratio donné.
- Utiliser une formule liant deux grandeurs dans une situation de proportionnalité (par exemple la longueur d'un cercle en fonction de son rayon, la loi d'Ohm exprimant la tension en fonction de l'intensité, la distance parcourue en fonction du temps à vitesse constante, etc.).
- Résoudre des problèmes utilisant la proportionnalité (pourcentages, échelles, agrandissement réduction).

Énoncé de l'exercice 1

Construire un triangle $A'B'C'$ agrandissement du triangle ABC tel que $A'B' = 8$ cm.



Réponses proposées par trois élèves



Énoncé de l'exercice 2

D'après la Compétition mathématique sans frontières

Pour traverser un centre commercial Victorien emprunte un trottoir roulant sur lequel il marche de son pas habituel.
Il va ainsi d'une extrémité à l'autre de ce trottoir en 1 min 12 sec.
Il fait ensuite l'expérience de remonter ce trottoir à contre-sens en marchant toujours de son pas habituel. Il lui faut alors 6 min pour le parcourir complètement.

Le lendemain, le trottoir roulant est en panne. Combien de temps Victorien met-il alors pour se déplacer d'une extrémité du trottoir à l'autre en marchant de son pas habituel ?

Questions au candidat

I - Rédaction d'une solution

Rédiger une solution de l'exercice 1 telle qu'elle pourrait figurer dans des cahiers d'élèves. On proposera deux méthodes distinctes en indiquant à chaque fois le niveau de classe considéré.

II - Analyse des productions d'élèves

1 – Analyser les solutions apportées par les trois élèves à l'exercice 1 en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles.

2 – Indiquer pour chaque élève les annotations que l'on pourrait faire figurer sur sa copie afin de l'aider à progresser.

3 – Proposer pour chacun de ces trois élèves un exercice de remédiation adapté à ses besoins.

III - Enseignement de la proportionnalité au cycle 4

1 – Proposer trois questions à choix multiple (QCM) visant à évaluer la capacité d'un élève de cycle 4 à reconnaître des situations de proportionnalité. On s'efforcera de varier les contextes : vie courante, géométrie, etc.

2 – Proposer l'énoncé d'un exercice mettant en jeu la proportionnalité. Celui-ci devra s'appuyer sur une situation concrète et permettre de travailler l'une des connaissances ou compétences du programme du cycle 4 indiquées dans le dossier de ce thème 1. On explicitera la connaissance ou compétence visée.

3 – Expliquer comment le développement des compétences suivantes peut donner lieu à un prolongement de l'étude de la proportionnalité au cycle 4, en explicitant le lien entre qui existe entre la proportionnalité et ces différentes notions :

- comprendre l'effet de quelques transformations sur les figures géométriques ;
- comprendre et utiliser la notion de fonction.

IV - Exercice à prise d'initiative

1 – Citer les pré-requis nécessaires à la résolution de l'exercice 2.

2 – Proposer, en précisant le niveau auquel on se place, une résolution de l'exercice 2.

V - Exponentielle et proportionnalité

1 – Présenter une approche des fonctions exponentielles faisant intervenir la notion de proportionnalité.

2 – Existe-t-il d'autres façons d'introduire les fonctions exponentielles ?

3 – Proposer l'étude d'un phénomène ayant une évolution exponentielle en prenant appui sur l'utilisation d'un tableur ou sur un programme en langage Python.

Dossier, partie 2 : suites et équations différentielles

Programme de spécialité mathématiques de terminale de l'enseignement général

Primitives, équations différentielles
(...)
Contenus

- Équation différentielle $y' = f$. Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Primitives des fonctions de référence : $x \longmapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}, x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, sinus, cosinus.
- Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes. Équation différentielle $y' = ay + b$.

Capacités attendues

- Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

Démonstration

- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel.

Exemple d'algorithme

- Résolution par la méthode d'Euler de $y' = f$, de $y' = ay + b$.

Les compétences mathématiques au lycée

Ressources pour le lycée général et technologique
Les Compétences mathématiques au lycée (MEN/DGESCO-IGEN, Eduscol, novembre 2013)

Modéliser

Traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations, de suites, de fonctions, de configurations géométriques, de graphes, de lois de probabilité, d'outils statistiques, etc.).

Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique ou géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.

Valider ou invalider un modèle.

Énoncé de l'exercice 3

D'après le document ressource Suites, exponentielle, probabilités – Modéliser et représenter (MENJ, Eduscol, novembre 2019)

On administre un analgésique au moyen d'une perfusion à débit continu et on souhaite arrêter la perfusion lorsque la quantité de cet analgésique présente dans l'organisme du patient aura atteint le seuil de 15 μg.

Modélisation par une suite

On modélise la quantité d'analgésique, exprimée en μg, par la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} - u_n = 0,1(16 - u_n)$$

où n désigne le nombre de minutes écoulées depuis la mise en place de la perfusion.

1 – Écrire un algorithme permettant de déterminer à la minute près l'instant auquel, d'après ce modèle, la perfusion devra être stoppée.

2 – Étudier la nature de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 16 - u_n$. En déduire une expression de u_n en fonction de n, puis étudier le comportement de cette suite à l'infini.

Modélisation par une fonction

On modélise l'évolution de la quantité d'analgésique en fonction du temps écoulé en minutes depuis le début de la perfusion, par une solution de l'équation différentielle

$$y' = 0,1(16 - y) \qquad (E)$$

3 – Résoudre l'équation différentielle (E).

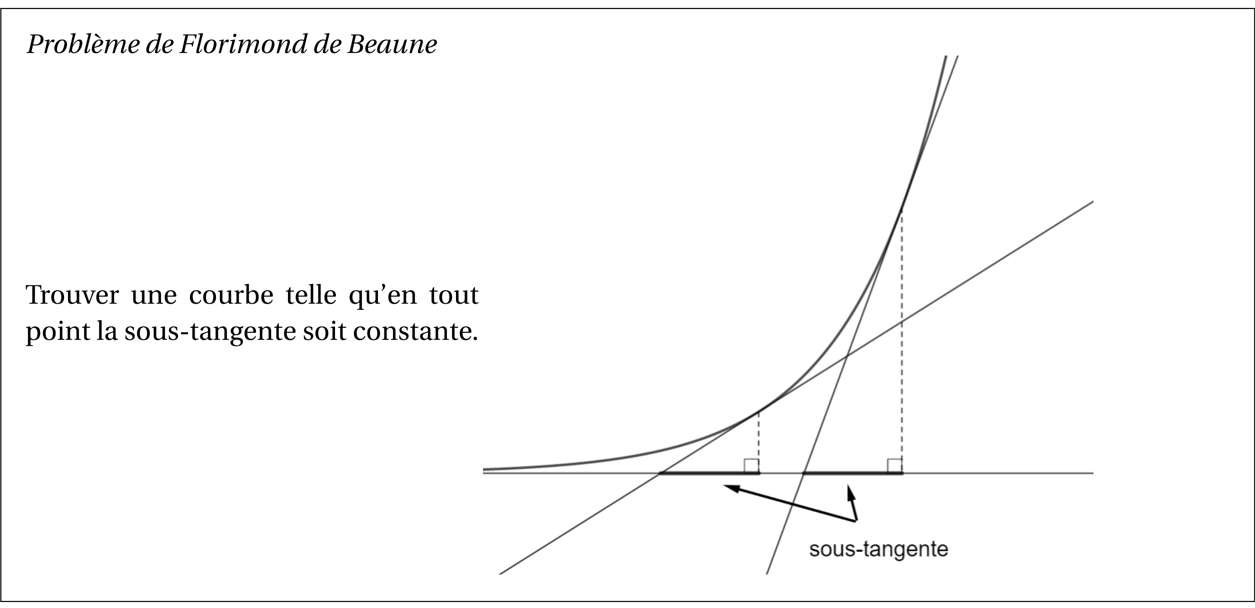
4 – Sachant que la quantité initiale d'analgésique est nulle, déterminer à la minute près l'instant auquel, d'après ce modèle, la perfusion devra être stoppée.

5 – Déterminer le comportement à l'infini de la fonction solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Énoncé de l'exercice 4

Problème de Florimond de Beaune

Trouver une courbe telle qu'en tout point la sous-tangente soit constante.



Questions au candidat

VI - Rédaction d'une solution

Rédiger une solution de l'exercice 3 telle qu'elle pourrait être présentée à une classe de terminale dans le cadre de l'enseignement de spécialité mathématiques.
On détaillera la réponse à chaque question en prenant soin de donner toutes les justifications nécessaires.

VII - Apprentissage de la compétence *Modéliser*

1 – À partir de l'observation de plusieurs malades de même morphologie, on a dressé le tableau suivant donnant la quantité d'analgésique en μg en fonction de la durée exprimée en minute.

durée	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
quantité	0	3	5,4	7,3	9,1	10,5	11,6	12,3	13,1	13,5	14

Au regard de ce tableau, comment pourrait-on modifier l'énoncé de l'exercice 3 afin qu'il fasse appel à la compétence *Modéliser*? On pourra prendre appui sur l'utilisation d'un tableur.

2 – Quelle différence existe-t-il entre la modélisation au moyen d'une suite et la modélisation à l'aide d'une fonction? Comment désigne-t-on habituellement ces deux types de modélisation?

VIII - Conception d'une séquence d'enseignement

Proposer le contenu de plusieurs séances portant sur les équations différentielles pour un groupe d'élèves suivant la spécialité mathématiques en classe de terminale.

Cette présentation devra comprendre les éléments suivants :

1 – les objectifs et le contenu de ces séances;

2 – la rédaction précise et complète des définitions et propriétés qui figureront dans le cahier de cours des élèves;

3 – la résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel, mentionnée dans le programme;

4 – différents types d'activités, avec un exemple d'exercice pour chacune d'elles;

5 – des pistes d'utilisation d'outils numériques.

IX - Exercice à prise d'initiative

1 – Résoudre l'exercice 4.

2 – Proposer des éléments observables permettant d'apprécier la réussite d'un élève de terminale dans la résolution de cet exercice.

3 – Le problème de Florimond de Beaune a été posé au XVIIe siècle. Ce siècle a été marqué par des progrès considérables en analyse. Citer des évolutions majeures qui ont été réalisées dans ce domaine durant cette période.